Konstruierbarkeit des Siebzehnecks

Der Kinofilm „Die Vermessung der Welt“ war Anstoß, sich mit der Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks und damit den Gedankengängen des berühmten Mathematikgenies Carl Friedrich Gauß (1777 -1855) auseinanderzusetzen. Auch wenn Gauß die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal meines Wissens selbst nicht demonstriert hat, so ist die Tatsache überhaupt doch maßgeblich seiner Lösung der mathematischen Gleichung $x^{17} - 1 = 0$ zu verdanken. Laut Literatur (siehe [2]) wurde die erste explizite Konstruktion durch Johannes Erchinger im Jahre 1825 veröffentlicht. Die von mir hier später eingehend erläuterte und nachvollzogene Konstruktion wurde gemäß Literaturverzeichnis [1] wohl erstmalig von Richmond im Jahre 1893 geliefert.

Dass überhaupt das Siebzehneck mit der Primzahl 17 konstruierbar sein sollte, war schon eine Überraschung, noch überraschender war die Erkenntnis über die Einfachheit und Freude bei der Nachvollziehung der Gedanken, die sich Gauß wohl bei der Lösung dieses mathematischen Problems gemacht haben mag.

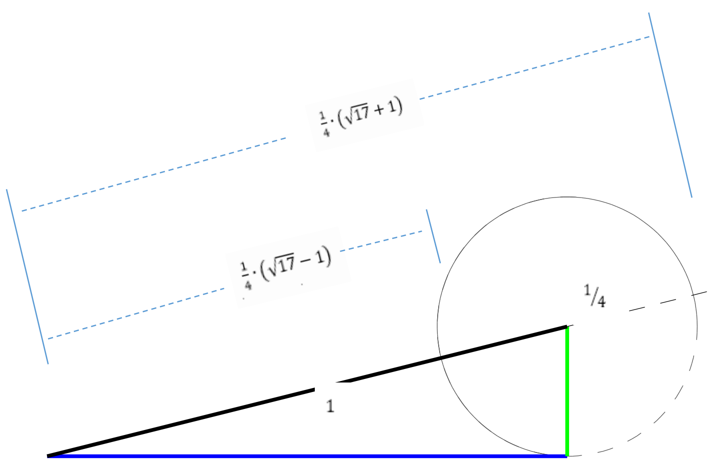
Nachweisbar ist, dass beispielsweise die regelmäßigen n-Ecke für n=7, 9, 11, 13, 14 nicht konstruierbar sind, alle anderen bis zur Zahl 17 jedoch sehr wohl.

Der Beweis der Konstruierbarkeit des Siebzehnecks wurde allein dadurch schon gegeben, dass der Cosinus des Zentriwinkels geschlossen ausgedrückt werden kann. Diesen Ausdruck nachzuvollziehen und mathematisch herzuleiten, war die ursächliche Heraus-

$$\cos\left(\frac{360}{17}\right) = {}^{1}\!/_{16} * \left[\sqrt{17} - 1 + \sqrt{2*17 - 2\sqrt{17}} + 2*\sqrt{17 + 3*\sqrt{17} - \sqrt{2*17 - 2*\sqrt{17}} - 2*\sqrt{2*17 + 2*\sqrt{17}}}\right]$$

forderung und letztlich auslösender Grund meiner Überlegungen und für diese Abhandlung.

Da die Wurzel aus 17 in dem obigen Ausdruck das grundlegende Element ist, war der erste Gedanke zumindest bei mir sofort, dass das rechtwinkelige Dreieck mit den Katheten 1 und 4 bzw. dem entsprechenden Seitenverhältnis im Einheitskreis eine wichtige Rolle spielen musste.



An dieser Zeichnung erkennt man nicht nur, dass die Hypotenuse die Länge $\sqrt{17}$ bzw. ${}^{1}/_{4} \cdot \sqrt{17}$ hat, sondern vielmehr sieht man leicht auch, dass nach der dritten binomischen Formel ebenfalls gilt:

$\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1) \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{17}+1) = \frac{1}{16}(17-1) = \frac{16}{16} = 1$

Für spätere Überlegungen führen wir an dieser Stelle kurz den Beweis, dass die Ausdrücke

$\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{17}-1)$ und $-\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{17}+1)$ exakt die Lösungen folgenden Gleichungssystems sind:

$$p \cdot p' = -1$$
$$p + p' = -\frac{1}{2}$$

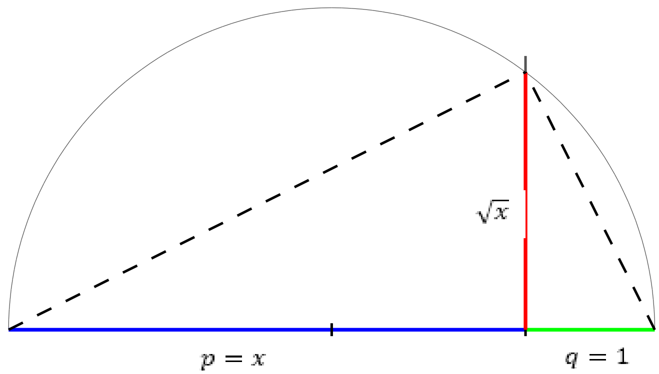
Aus II folgt $p' = -\frac{1}{2} - p$ und damit: $p \cdot \left(-\frac{1}{2} - p\right) = -p^2 - \frac{1}{2}p = -1$ bzw. $p^2 + \frac{1}{2}p = 1$. Die Lösung dieser doch recht einfachen quadratischen Gleichung ist:

$p^2 + \frac{1}{2}p + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$

$\left(p + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$ und somit $p_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{16}} == -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17} = \frac{1}{4}(\pm\sqrt{17}-1)$, d.h.

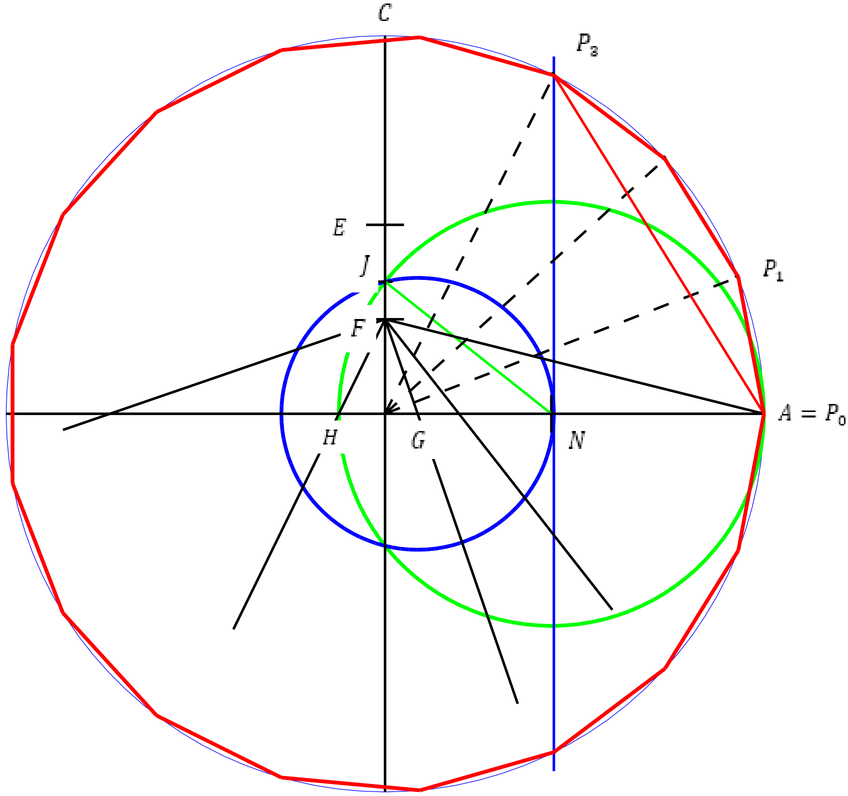
$p_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)$ und $p_2 = -\frac{1}{4}(\sqrt{17}+1)$. Setzen wir nun $p = p_1$, dann folgt sofort $p' = p_2$ und umgekehrt.

Nebenbei sei an dieser Stelle auch erwähnt, dass sich die Wurzel aus jeder beliebigen Zahl (natürlich nur solcher Zahlen, die sich mit Lineal bis zu einer entsprechenden Genauigkeit auf ein Blatt Papier übertragen lassen) konstruieren lässt.
Zum Nachweis dieser Behauptung diene folgende Grafik.



Nach dem Höhensatz des Euklid (leicht ableitbar von Pythagoras) gilt: $h^2 = p \cdot q$, in unserem Fall also $h^2 = x \cdot 1 = x$ und damit $h = \sqrt{x}$.
Zur Konstruktion bedient man sich dabei des Thaleskreises über der Strecke $x+1$ und dessen Mitte bei $\frac{1}{2}(x+1)$. Der Schnittpunkt des Lotes auf der Strecke $x+1$ mit dem Thaleskreis ergibt den gesuchten Wert $h = \sqrt{x}$ der Wurzel von x .
Konstruktionsschritte des Siebzehnecks:

1. Zeichne einen Kreis mit beliebigem Radius (wobei der Radius der Einheit 1 entspricht);
2. Zeichne eine horizontale Linie als Durchmesser und dessen entsprechender Mittelsenkrechte;
3. Teile die Strecke $\overline{OC}$ in der Mitte bei E (Mittelsenkrechte bei $^1/_2$); O bezeichne den Ursprung bzw. den Mittelpunkt des Ausgangskreises;
4. Teile die Strecke $\overline{OE}$ nochmals in der Mitte bei F (also rechnerisch bei jetzt $^1/_4$); Verbinde die Punkte F und A, es entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck $\triangle AOF$ mit den Kathetenlängen 1 und $^1/_4$ und dem Winkel $\measuredangle OFA = \beta = tan^{-1}(4)$, denn $tan(\beta) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$;



ebenso gilt $sin(\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$, da

$$\overline{FA} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{17};$$

5. Zeichne die Winkelhalbierende w_1 des Winkels $\measuredangle OFA$ und nochmals dessen Winkelhalbierende w_2 ; wir erhalten den Winkel $\measuredangle OFG = \frac{1}{4}\beta = \frac{1}{4}tan^{-1}(4)$;
damit gilt auch $tan\left(\frac{\beta}{4}\right) = \frac{\overline{OG}}{\frac{1}{4}} = 4 \cdot \overline{OG}$;

6. Ziehe das Lot zu w_2 auf F; der Schnittpunkt mit dem horizontalen Durchmesser und den Punkten F und G bildet einen rechten Winkel; Die Winkelhalbierende dieses Winkels bildet den Schnittpunkt H auf der horizontalen Linie; und es gilt hierfür $tan\left(45-\frac{\beta}{4}\right)=4\cdot\overline{OH}$;
7. Mittels der Mittelsenkrechten ermitteln wir den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{HA}=\overline{OH}+1$;
8. Zeichne einen Kreis (grün) um diesen Punkt M mit Radius $r_2=\overline{HM}=\frac{1}{2}\overline{HA}=\frac{1}{2}\left(\overline{OH}+1\right)$;
9. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Linie $\overline{OC}$ liefert den Punkt J ;
10. Zeichne einen Kreis (blau) um G mit dem Radius $r_3=\overline{GJ}$;
11. Der Schnittpunkt mit dem horizontalen Durchmesser liefert den Punkt N (Achtung: dieser liegt sehr nahe bei M);
12. Schlussendlich zeichne das Lot auf N (Tangente an den blauen Kreis im Punkt N); der Schnittpunkt dieses Lotes mit dem Ausgangskreis liefert den Punkt P_3 ; der Bogen $\overline{AP_3}=\overline{P_0P_3}$ liefert das Dreifache des Winkels $\alpha=\frac{1}{17}\cdot 2\pi$ oder $\alpha=\frac{360}{17}$.

Der Beweis dieser letzten Behauptung ist allerdings hier noch zu erbringen, nämlich der Beweis von
$\mathrm{s}=2\cdot\sin\left(\frac{360\cdot 3}{17}\cdot\frac{1}{2}\right)$, wobei $\mathrm{s}=\overline{\mathrm{P_0P_3}}$. Diese Behauptung ist äquivalent zu der Behauptung $\cos(3\alpha)=\cos\left(3\cdot\frac{360}{17}\right)=\overline{\mathrm{ON}}$.
Es gilt:
$\mathrm{r_2}=\frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{OH}}+1\right)$ und $\overline{\mathrm{OJ}}^2=\mathrm{r_2}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2$ sowie $\overline{\mathrm{OM}}=\mathrm{r_2}-\overline{\mathrm{OH}}$, woraus folgt:

$\overline{\mathrm{OJ}}^2=\mathrm{r_2}^2-\left(\mathrm{r_2}-\overline{\mathrm{OH}}\right)^2=\mathrm{r_2}^2-\left(\mathrm{r_2}^2-2\mathrm{r_2}\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{OH}}^2\right)=2\mathrm{r_2}\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{OH}}^2=\overline{\mathrm{OH}}\left(2\mathrm{r_2}-\overline{\mathrm{OH}}\right)$
$\mathrm{r_2}=\frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{OH}}+1\right)$ und daher
$\overline{\mathrm{OJ}}^2=\overline{\mathrm{OH}}\left(2\frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{OH}}+1\right)-\overline{\mathrm{OH}}\right)=\overline{\mathrm{OH}}$; also kurz
$\overline{\mathrm{OJ}}^2=\overline{\mathrm{OH}}$.

Für den Kreisradius r_3 gilt:
$\mathrm{r_3}=\overline{\mathrm{GN}}$ oder $\mathrm{r_3}=\overline{\mathrm{GJ}}$ und daher $\mathrm{r_3}^2=\overline{\mathrm{GJ}}^2=\overline{\mathrm{OJ}}^2+\overline{\mathrm{OG}}^2=\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{OG}}^2$;
Außerdem

$\overline{\mathrm{ON}}=\overline{\mathrm{OG}}+\overline{\mathrm{GN}}=\overline{\mathrm{OG}}+\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{OG}}^2}$; wir merken uns also
$\overline{\mathrm{ON}}=\overline{\mathrm{OG}}+\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{OG}}^2}$ sowie nach Pythagoras $\overline{\mathrm{NP_3}}^2=1-\overline{\mathrm{ON}}^2$ bzw.
$\overline{\mathrm{NP_3}}=\sqrt{1-\overline{\mathrm{ON}}^2}$.

Es bleibt nachzuweisen: $\cos(3\alpha)=\overline{\mathrm{ON}}$ oder $\sin(3\alpha)=\overline{\mathrm{NP_3}}$.

Ferner gilt ebenfalls (evtl. wird es an späterer Stelle benötigt):
$\mathrm{s}^2=\overline{\mathrm{P_0P_3}}^2=\overline{\mathrm{NP_3}}^2+\left(1-\overline{\mathrm{ON}}\right)^2=\overline{\mathrm{NP_3}}^2+\left(1-2\overline{\mathrm{ON}}+\overline{\mathrm{ON}}^2\right)$
$\mathrm{s}^2=\overline{\mathrm{NP_3}}^2+1-2\overline{\mathrm{ON}}+\left(1-\overline{\mathrm{NP_3}}^2\right)=2\left(1-\overline{\mathrm{ON}}\right)$ bzw.

$\overline{ON} = 1 - \frac{s^2}{2} = 1 - 2\left(\frac{s}{2}\right)^2.$

Aus Punkt 8 der Konstruktionsbeschreibung können wir schließen:

Wegen $\tan\left(45 - \frac{\beta}{4}\right) = \frac{1-\tan\left(\frac{\beta}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\beta}{4}\right)} = \frac{\left(1-\tan\left(\frac{\beta}{4}\right)\right)^2}{1-tan^2\left(\frac{\beta}{4}\right)} = \frac{\left(cos\left(\frac{\beta}{4}\right)-sin\left(\frac{\beta}{4}\right)\right)^2 \cdot cos^2\left(\frac{\beta}{4}\right)}{\left(cos^2\left(\frac{\beta}{4}\right)-sin^2\left(\frac{\beta}{4}\right)\right)\cdot cos^2\left(\frac{\beta}{4}\right)} = \frac{\left(cos\left(\frac{\beta}{4}\right)-sin\left(\frac{\beta}{4}\right)\right)^2}{\left(1-2sin^2\left(\frac{\beta}{4}\right)\right)}$

Also $\tan\left(45 - \frac{\beta}{4}\right) = \frac{1-2sin\left(\frac{\beta}{4}\right)cos\left(\frac{\beta}{4}\right)}{1-2sin^2\left(\frac{\beta}{4}\right)} = \frac{1-sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{1}{cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} - tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$

Wie wir gesehen haben, gilt: $\tan\left(45 - \frac{\beta}{4}\right) = 4 \cdot \overline{OH}$, also auch $4 \cdot \overline{OH} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} - \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$

Außerdem gilt allgemein: $cos(2\alpha) = \frac{1-tan^2(\alpha)}{1+tan^2(\alpha)}$,

und wegen $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$ folgt daher $cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1-tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1+tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$ und damit

$\frac{1}{\sqrt{17}}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) = 1 - \tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$, also $\tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{17}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{17}}$

und damit $\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{17}}}{1+\frac{1}{\sqrt{17}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{\sqrt{17}+1}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{17}-1\right)^2}{17-1}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1\right)$.

Des Weiteren gilt allgemein $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ und somit $\cos(\beta) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$ bzw.

$\cos(\beta) = 2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1$. Damit gilt: $\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos(\beta) + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{17}} + 1\right)$ bzw.

$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{17}} + 1\right)}$.

$4 \cdot \overline{OH} = \frac{1}{cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} - tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\right)}} - \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1\right) = \sqrt{\frac{2\cdot\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}} - \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1\right)$

$4 \cdot \overline{OH} = \sqrt{\frac{2\cdot\sqrt{17}\left(\sqrt{17}-1\right)}{\left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)}} - \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1\right) = \frac{\sqrt{2\cdot 17 - 2\cdot\sqrt{17}}}{4} - \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1\right)$

$4 \cdot \overline{OH} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2 \cdot 17 - 2 \cdot \sqrt{17}} - \sqrt{17} + 1\right)$

$\overline{OH} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{2 \cdot 17 - 2 \cdot \sqrt{17}} - \sqrt{17} + 1\right)$

Nun gilt aber auch allgemein $\tan(2 \propto) = \frac{2\cdot\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$ und deshalb:

$\frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1\right) = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2\cdot\tan\left(\frac{\beta}{4}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\beta}{4}\right)}$; wir setzen $p = \tan\left(\frac{\beta}{4}\right)$ und erhalten

$\frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1\right) = \frac{2p}{1-p^2}$ bzw. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1\right) \cdot (1 - p^2) = 2p$ und nun

$\left(\sqrt{17} - 1\right) \cdot (1 - p^2) = 8p$ oder $\left(\sqrt{17} - 1\right) \cdot p^2 + 8p = \left(\sqrt{17} - 1\right)$.

Durch Multiplikation der Gleichung mit dem Faktor $\left(\sqrt{17} + 1\right)$ wird daraus

$\left(\sqrt{17} - 1\right)\left(\sqrt{17} + 1\right) \cdot p^2 + 8\left(\sqrt{17} + 1\right)p = \left(\sqrt{17} - 1\right)\left(\sqrt{17} + 1\right)$

$16\cdot p^2 + 8\left(\sqrt{17} + 1\right)p = 16$ bzw. $p^2 + \frac{\sqrt{17}+1}{2} \cdot p = 1$;

mitttels quadratischer Ergänzung lösen wir:

$p^2 + \frac{\sqrt{17}+1}{2} \cdot p + \left(\frac{\sqrt{17}+1}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{17}+1}{4}\right)^2 = \frac{16+\left(17+2\sqrt{17}+1\right)}{16} = \frac{2\cdot 17+2\sqrt{17}}{16}$

$\left(p + \left(\frac{\sqrt{17}+1}{4}\right)\right)^2 = \frac{2\cdot 17+2\sqrt{17}}{16}$ und damit $p + \left(\frac{\sqrt{17}+1}{4}\right) = \pm\frac{1}{4}\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}}$

$p_{1,2} = -\left(\frac{\sqrt{17}+1}{4}\right) \pm \frac{1}{4}\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}}$

$p_{1,2} = \frac{1}{4}\left(\pm\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right)\right)$

Wegen $p = \tan\left(\frac{\beta}{4}\right) > 0$ folgt: $p = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right)\right)$.

Für $\overline{OG}$ erhalten wir dann aus $\tan\left(\frac{\beta}{4}\right) = 4\cdot\overline{OG}$

$\overline{OG} = \frac{1}{4}\tan\left(\frac{\beta}{4}\right) = \frac{1}{16}\left(\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right)\right)$.

Nun können wir mit der obigen Gleichung $\overline{ON} = \overline{OG} + \sqrt{\overline{OH} + \overline{OG}^2}$ den Wert für $\overline{ON}$ ermitteln. Dazu vereinfachen wir zunächst $\overline{OG}^2 = \left(\frac{1}{16}\left(\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right)\right)\right)^2$

$$\overline{OG}^2 = \left(\frac{1}{16}\right)^2\cdot\left(\left(2\cdot 17 + 2\sqrt{17}\right) - 2\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} + \left(\sqrt{17}+1\right)^2\right)$$

$$\overline{OG}^2 = \left(\frac{1}{16}\right)^2\cdot\left(2\sqrt{17}\left(\sqrt{17}+1\right) - 2\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} + \left(\sqrt{17}+1\right)^2\right)$$

$$\overline{OG}^2 = \left(\frac{1}{16}\right)^2\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\left(2\sqrt{17} - 2\sqrt{\left(2\cdot 17 + 2\sqrt{17}\right)} + \left(\sqrt{17}+1\right)\right)$$

$$\overline{OG}^2 = \left(\frac{1}{16}\right)^2\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\left(3\sqrt{17} - 2\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} + 1\right)$$

Somit erhalten wir für $\overline{ON}$

$$\overline{ON} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right)\right) + \sqrt{\frac{1}{16}\left(\sqrt{2\cdot 17 - 2\cdot\sqrt{17}} - \sqrt{17} + 1\right) + \left(\frac{1}{16}\right)^2\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\left(3\sqrt{17} - 2\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} + 1\right)}$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right) + \sqrt{16\left(\sqrt{2\cdot 17 - 2\cdot\sqrt{17}} - \sqrt{17} + 1\right) + \left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\left(3\sqrt{17} - 2\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} + 1\right)}\right)$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right) + \sqrt{16\left(\sqrt{2\sqrt{17}\left(\sqrt{17}-1\right)} - \sqrt{17} + 1\right) + \left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\left(3\sqrt{17} - 2\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} + 1\right)}\right)$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right) + \sqrt{16\cdot\sqrt{2\sqrt{17}\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)} - 16\left(\sqrt{17}-1\right) + \left(3\cdot 17 + 4\sqrt{17} + 1\right) - 2\left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}}}\right)$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right) + \sqrt{16\cdot\sqrt{2\sqrt{17}\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)} - 16\sqrt{17} + \left(4\cdot 17 + 4\sqrt{17}\right) - \left(2\sqrt{17}+2\right)\cdot\sqrt{2\cdot 17 + 2\sqrt{17}}}\right)$$

$$\overline{\mathrm{ON}} = \frac{1}{16}\Bigg(\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right) + \sqrt{16\cdot\sqrt{2\sqrt{17}\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)} - 16\sqrt{17} + 4\sqrt{17}\left(\sqrt{17}+1\right) - 2\left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}}\Bigg)$$

$$\overline{\mathrm{ON}} = \frac{1}{16}\Bigg(\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right) + \sqrt{16\cdot\sqrt{2\sqrt{17}\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)} - 16\sqrt{17} + \left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\left(4\sqrt{17} - 2\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}\right)}\Bigg)$$

Wegen $\left(\sqrt{17}-1\right)\left(\sqrt{17}+1\right) = 16$ vereinfachen wir zu

$$\overline{\mathrm{ON}} = \frac{1}{16}\Bigg(\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}} - \left(\sqrt{17}+1\right) + \sqrt{16\cdot\sqrt{2\sqrt{17}\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)} + \left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\left(5\sqrt{17} - 17 - 2\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}\right)}\Bigg)$$

$\overline{ON} \approx 0.445738356$

Ebenfalls ist $\cos(3\alpha) = \cos\left(3\cdot\frac{360}{17}\right) \approx 0.445738356$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Um genau zu sein, müssten wir jedoch noch die obige Gleichung für $\overline{\mathrm{ON}}$ aus dem Ausdruck für $\cos(\propto)$ herleiten, indem wir umformen

$\cos(\propto)\cdot\cos(2\propto) = \frac{1}{2}\cos(3\propto) + \frac{1}{2}\cos(\propto)$ zu

$\frac{1}{2}\cos(3\propto) = \cos(\propto)\cdot\cos(2\alpha) - \frac{1}{2}\cos(\alpha) = \cos(\propto)\cdot(2\cos^2(\propto) - 1) - \frac{1}{2}\cos(\alpha)$

$\cos(3\propto) = 2\cos(\propto)\cdot(2\cos^2(\propto) - 1) - \cos(\alpha)$

und schließlich zu

$\cos(3\propto) = 4\cos^3(\propto) - 3\cos(\alpha)$.

Den folgenden Ausdruck für $\cos(\alpha) = \cos\left(\frac{360}{17}\right)$ in diese Gleichung eingesetzt, müsste zu dem obigen Ausdruck für $\overline{\mathrm{ON}}$ führen.

$$\cos\left(\frac{360}{17}\right) = {}^{1}\!/_{16} * \left[\sqrt{17} - 1 + \sqrt{2*17-2\sqrt{17}} + 2*\sqrt{17+3*\sqrt{17} - \sqrt{2*17-2*\sqrt{17}} - 2*\sqrt{2*17+2*\sqrt{17}}}\right]$$

Aber wie ist Gauß überhaupt auf diesen Ausdruck gekommen?

Die erste grundlegende Erkenntnis, die er sich hierbei zu Nutze machte, war die Tatsache, dass (wie übrigens für jedes regelmäßige n-Eck) gilt:

$\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cdots + \cos(16\alpha) + \cos(17\alpha) = 0$ bzw. wegen
$\cos(17\alpha) = \cos(0) = 1$

$\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cdots + \cos(16\alpha) = -1$

Außerdem gilt, wie man leicht sieht:

$\cos(\alpha) = \cos(16\alpha)$
$\cos(2\alpha) + \cos(15\alpha)$
$\cos(3\alpha) + \cos(14\alpha)$
$\cos(4\alpha) + \cos(13\alpha)$
$\cos(5\alpha) + \cos(12\alpha)$
$\cos(6\alpha) + \cos(11\alpha)$
$\cos(7\alpha) + \cos(10\alpha)$
$\cos(8\alpha) + \cos(9\alpha)$

Damit gilt
$\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cdots + \cos(8\alpha) = \cos(9) + \cos(10\alpha) + \cdots + \cos(16\alpha) = -\frac{1}{2}$.
Bei einem 5-Eck beispielsweise gilt so $\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) = -\frac{1}{2}$. Wegen
$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ folgt $\cos(\propto) + 2\cos^2(\propto) - 1 = -\frac{1}{2}$ bzw.
$\cos^2(\alpha) + \frac{1}{2}\cos(\alpha) = \frac{1}{4}$ und daraus: $\cos(\alpha) = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$. Da hier $\alpha = \frac{360}{5} = 72$ muß $\cos(\alpha) > 0$ sein, folglich $\cos(\alpha) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ und $\cos(2\alpha) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right)$.

Im Falle des Siebzehnecks wählen wir

$p = \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(8\alpha)$ und
$p' = \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha)$.

Dann gilt: $p + p' = -\frac{1}{2}$ und $p \cdot p' = -1$, denn

$$(\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(8\alpha)) \cdot (\cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha)) =$$
$$\cos(\alpha)\cdot\cos(3\alpha) + \cos(\alpha)\cdot\cos(5\alpha) + \cos(\alpha)\cdot\cos(6\alpha) + \cos(\propto)\cdot\cos(7\alpha) +$$
$$\cos(2\alpha)\cdot\cos(3\alpha) + \cos(2\alpha)\cdot\cos(5\alpha) + \cos(2\alpha)\cdot\cos(6\alpha) + \cos(2\alpha)\cdot\cos(7\alpha) +$$
$$\cos(4\alpha)\cdot\cos(3\alpha) + \cos(4\alpha)\cdot\cos(5\alpha) + \cos(4\alpha)\cdot\cos(6\alpha) + \cos(4\alpha)\cdot\cos(7\alpha) +$$
$$\cos(8\alpha)\cdot\cos(3\alpha) + \cos(8\alpha)\cdot\cos(5\alpha) + \cos(8\alpha)\cdot\cos(6\alpha) + \cos(8\alpha)\cdot\cos(7\alpha) =$$

$$\tfrac{1}{2}(\cos(4\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(7\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(8\alpha) + \cos(6\alpha)) +$$
$$\tfrac{1}{2}(\cos(5\alpha) + \cos(\alpha) + \cos(7\alpha) + \cos(3\alpha) + \cos(8\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(9\alpha) + \cos(5\alpha)) +$$
$$\tfrac{1}{2}(\cos(7\alpha) + \cos(\alpha) + \cos(9\alpha) + \cos(\alpha) + \cos(10\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(11\alpha) + \cos(3\alpha)) +$$
$$\tfrac{1}{2}(\cos(11\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(13\alpha) + \cos(3\alpha) + \cos(14\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(15\alpha) + \cos(\alpha)) =$$

$$\tfrac{1}{2}(\cos(4\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(7\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(8\alpha) + \cos(6\alpha)) +$$
$$\tfrac{1}{2}(\cos(5\alpha) + \cos(\alpha) + \cos(7\alpha) + \cos(3\alpha) + \cos(8\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(8\alpha) + \cos(5\alpha)) +$$
$$\tfrac{1}{2}(\cos(7\alpha) + \cos(\alpha) + \cos(8\alpha) + \cos(\alpha) + \cos(7\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(3\alpha)) +$$
$$\tfrac{1}{2}(\cos(6\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(3\alpha) + \cos(3\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(\alpha)) =$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot 4\cdot[\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha) + \cos(8\alpha)] =$$
$$2\cdot[\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha) + \cos(8\alpha)] =$$
$$2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1\,.$$

Weiter oben hatten wir ja bereits gezeigt, wenn für p, p' gilt: : $p + p' = -\frac{1}{2}$ und $p \cdot p' = -1$, dann gilt auch: $p = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1\right)$ und $p' = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{17} + 1\right)$, d.h.
$p = \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(8\alpha) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1\right)$ und
$p' = \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha) = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{17} + 1\right)$.

Nun hat Gauß erneut diese beiden Ausdrücke geschickt so zerlegt, daß gilt:
$\mathrm{q} = \cos(\alpha) + \cos(4\alpha)$, $\mathrm{r} = \cos(2\alpha) + \cos(8\alpha)$ mit $q + r = p$ und $q \cdot r = -\frac{1}{4}$, da

$(\cos(\alpha) + \cos(4\alpha)) \cdot (\cos(2\alpha) + \cos(8\alpha)) =$
$\frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha) + \cos(8\alpha)] =$
$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

Damit gilt $q \cdot (p - q) = -q^2 + pq = -\frac{1}{4}$ bzw. $q^2 - pq = \frac{1}{4}$ und daraus schlussendlich:
$\mathrm{q}_{1,2} = \frac{\mathrm{p}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{p}^2}$, woraus wir folgern: $\mathrm{q} = \frac{\mathrm{p}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{p}^2}$ und $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{p}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{p}^2}$.

Ebenso zeigen wir mit
$\mathrm{q}' = \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha)$, $\mathrm{r}' = \cos(6\alpha) + \cos(9\alpha)$, dass $\mathrm{q}' + \mathrm{r}' = \mathrm{p}'$ und $\mathrm{q}' \cdot \mathrm{r}' = -\frac{1}{4}$,
weshalb folgt:
$\mathrm{q}' = \frac{\mathrm{p}'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{p}'^2}$ und $\mathrm{r}' = \frac{\mathrm{p}'}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{p}'^2}$.

Nun gilt aber auch:
$\cos(\alpha) \cdot \cos(4\alpha) = \frac{1}{2}(\cos(5\alpha) + \cos(3\alpha)) = \frac{1}{2}\mathrm{q}'$ und wegen $\mathrm{q} = \cos(\alpha) + \cos(4\alpha)$ und
$\cos(\alpha) = \mathrm{q} - \cos(4\alpha) = \mathrm{q} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{q}'}{\cos(\alpha)}$, dass
$\cos^2(\alpha) - \mathrm{q} \cdot \cos(\alpha) = -\frac{\mathrm{q}'}{2}$ und somit $\left(\cos(\alpha) - \frac{\mathrm{q}}{2}\right)^2 = -\frac{\mathrm{q}'}{2} + \left(\frac{\mathrm{q}}{2}\right)^2$, d.h.
$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{q}}{2} + \sqrt{\frac{\mathrm{q}^2 - 2\mathrm{q}'}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{q} + \sqrt{\mathrm{q}^2 - 2\mathrm{q}'}\right)$.

Wir setzen ein und erhalten:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\mathrm{p}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{p}^2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{p}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{p}^2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\mathrm{p}'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{p}'^2}\right)}\ \right]$$

$$\mathrm{q} = \frac{\mathrm{p}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{p}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1) + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1)\right)^2}\right)$$

$$\mathrm{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1) + \sqrt{\frac{16 + (\sqrt{17} - 1)^2}{16}}\right) = \frac{1}{8}(\sqrt{17} - 1) + \frac{1}{8}\sqrt{16 + (\sqrt{17} - 1)^2}$$

$$\mathrm{q} = \frac{1}{8}\left((\sqrt{17} - 1) + \sqrt{16 + (\sqrt{17} - 1)^2}\right) = \frac{1}{8}\left((\sqrt{17} - 1) + \sqrt{16 + (17 - 2\sqrt{17} + 1)}\right) \cdot$$

$$\mathrm{q} = \frac{1}{8}\left((\sqrt{17} - 1) + \sqrt{2 \cdot 17 - 2\sqrt{17}}\right);$$

$$\mathrm{q}' = \frac{\mathrm{p}'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \mathrm{p}'^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}(\sqrt{17} + 1) + \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{4}(\sqrt{17} + 1)\right)^2}\right)$$

$$\mathrm{q}' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}(\sqrt{17} + 1) + \sqrt{\frac{16 + (\sqrt{17} + 1)^2}{16}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}(\sqrt{17} + 1) + \frac{1}{4}\sqrt{2 \cdot 17 + 2\sqrt{17}}\right)$$

$$\mathrm{q}' = -\frac{1}{8}\left((\sqrt{17} + 1) - \sqrt{2 \cdot 17 + 2\sqrt{17}}\right)$$

Damit erhalten wir wegen $\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{q} + \sqrt{\mathrm{q}^2 - 2\mathrm{q}'}\right)$ und

$$\mathrm{q}^2 = \frac{1}{4}\left(\mathrm{p} + \sqrt{1 + \mathrm{p}^2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\mathrm{p}^2 + 2\mathrm{p}\sqrt{1 + \mathrm{p}^2} + 1 + \mathrm{p}^2\right) = \frac{1}{4}\left(2\mathrm{p}^2 + 2\mathrm{p}\sqrt{1 + \mathrm{p}^2} + 1\right)$$

$$q^2 = \frac{1}{4}\left(2\cdot\frac{1}{16}\left(\sqrt{17}-1\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{1+\frac{1}{16}\left(\sqrt{17}-1\right)^2}+1\right)$$
$$q^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\left(17-2\sqrt{17}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{\frac{16+\left(\sqrt{17}-1\right)^2}{16}}+1\right)$$
$$q^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\left(17-2\sqrt{17}+1\right)+\frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{16+\left(17-2\sqrt{17}+1\right)}+1\right)$$
$$q^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\left(17-2\sqrt{17}+1\right)+\frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}+1\right)$$
$$q^2 = \frac{1}{32}\left(17-2\sqrt{17}+1+\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}+8\right)$$

$$2q' = 2\cdot\frac{1}{2}\left(p'+\sqrt{1+p'^2}\right) = p'+\sqrt{1+p'^2}$$
$$2q' = \left(p'+\sqrt{1+p'^2}\right) = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}+1\right)+\sqrt{1+\left(-\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}+1\right)\right)^2}$$
$$2q' = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}+1\right)+\sqrt{1+\frac{1}{16}\left(\sqrt{17}+1\right)^2}$$
$$2q' = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}+1\right)+\frac{1}{4}\sqrt{16+\left(\sqrt{17}+1\right)^2} == -\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}+1-\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}\right)$$

Damit ist

$$q^2-2q' = \frac{1}{32}\left(17-2\sqrt{17}+1+\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}+8\right)+\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}+1-\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}\right)$$

$$q^2-2q' = \frac{1}{32}\left(17-2\sqrt{17}+1+\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}+8+8\sqrt{17}+8-8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}\right)$$

$$q^2-2q' = \frac{1}{32}\left(2\cdot 17-2\sqrt{17}+\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}+8\sqrt{17}-8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}\right)$$

$$q^2-2q' = \frac{1}{64}\left(4\cdot 17-4\sqrt{17}+2\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}+16\sqrt{17}-16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}\right)$$

$$\sqrt{q^2-2q'} = \frac{1}{8}\sqrt{4\cdot 17-4\sqrt{17}+2\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}+16\sqrt{17}-16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}}$$

$$\sqrt{q^2-2q'} = \frac{1}{8}\sqrt{4\cdot 17+12\sqrt{17}+2\sqrt{17}\cdot\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}-2\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}-16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}}$$

Nun ist $16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}} = 8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}+8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}$
und mit einem kleinen Trick

$$16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}} = \frac{16}{2}\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}+8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}$$

$$16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-1\right)\left(\sqrt{17}+1\right)\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}+8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}$$

$$16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{17}+1\right)\sqrt{\left(2\cdot 17+2\sqrt{17}\right)\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)^2}+8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}$$

$$16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{17}+1\right)\sqrt{2\sqrt{17}\left(\sqrt{17}+1\right)\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)^2}+8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}$$

$$16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{17}+1\right)\sqrt{2\sqrt{17}(17-1)\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)}+8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}$$

$$16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}} = 2\left(\sqrt{17}+1\right)\sqrt{2\sqrt{17}\left(\sqrt{17}-1\right)}+8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}$$

$$16\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}=2\left(\sqrt{17}+1\right)\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}+8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}$$

Somit ergibt sich für

$$\frac{1}{2}\sqrt{q^2-2q'}=\frac{1}{16}\sqrt{\begin{array}{c}4\cdot 17+12\sqrt{17}+2\sqrt{17}\cdot\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}-2\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}-\\ 2\left(\sqrt{17}+1\right)\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}-8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}\end{array}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{q^2-2q'}=\frac{1}{16}\sqrt{4\cdot 17+12\sqrt{17}-4\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}-8\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{q^2-2q'}=\frac{1}{16}\cdot 2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}-2\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}}$$

$$\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2-2q'}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\cdot\left[\sqrt{17}-1+\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}-2\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}}\right]$$

und damit schlussendlich

$$\cos(\alpha)=\frac{1}{16}\cdot\left[\sqrt{17}-1+\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2\cdot 17-2\sqrt{17}}-2\sqrt{2\cdot 17+2\sqrt{17}}}\right]$$