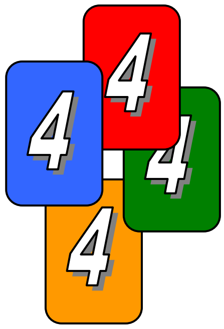
# *48 Karten in vier Farben*

Ein Satz Spielkarten besteht aus 48 Karten in vier Farben (Rot, Gelb, Blau und Grün). Die 12 Karten jeder Farbe sind von 1 bis 12 durchnummeriert.




Es werden immer drei Karten auf einmal gezogen.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   a) es wird keine grüne Karte gezogen;
   b) es wird ein Drilling (drei gleiche Zahlen) gezogen;
   c) es werden drei Karten unterschiedlicher Farben gezogen.

2. Stephi will mit Andy um Geld spielen. Für einen Einsatz von 50 Cent soll Andy drei Karten ziehen und folgende Gewinne erzielen: bei einem Zwilling (genau 2 gleiche Zahlen) bekommt Andy 1,00 Euro, bei drei Karten gleicher Farbe 4 Euro und bei einem Drilling 8 Euro. In allen anderen Fällen bekommt Andy nichts.

   Um welchen Betrag sollte Stephi den Gewinn für einen Zwilling erhöhen, damit das Spiel aus der Sicht von Andy fair ist ?

**Lösung:**

**zu 1):**
da es sich um ein Experiment ohne Zurücklegen handelt, können wir hier grundsätzlich die Anzahl aller möglichen Kombinationen mit $\binom{48}{3} = \frac{48\,!}{3\,!\cdot(48-3)\,!} = \frac{46\cdot 47\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3} = 23\cdot 47\cdot 16 = 17.296$ berechnen.

a) Um die Zahl aller in Frage kommenden Kombinationen ohne eine grüne Karte zu ermitteln, berechnen wir: $\binom{36}{3}\cdot\binom{12}{0}$, denn wir wählen aus den 36 nicht grünen Karten 3 aus (und von den 12 grünen Karten keine).

   Als Wahrscheinlichkeit erhalten wir dann: $p = \frac{\binom{36}{3}\cdot 1}{\binom{48}{3}} = \frac{36\cdot 35\cdot 34}{48\cdot 47\cdot 46} \approx 0.4128$

b) Die Wahrscheinlichkeit einen Drilling zu ziehen ist:
   $p = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{12}{1}}{\binom{48}{3}} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 12}{48\cdot 47\cdot 46} \approx 0.0028$, denn wir haben exakt $\binom{4}{3} = 4$ Farbkombinationen und 12 unterschiedliche Zahlen.

c) Für den Fall, dass drei Karten unterschiedlicher Farbe gezogen werden, erhalten wir als Ergebnis:

$$p = \frac{\binom{4}{3}\cdot 12^3}{\binom{48}{3}} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 12^3}{48\cdot 47\cdot 46} \approx 0.3996$$

**zu 2):**
Bevor wir an die eigentliche Fragestellung herangehen, berechnen wir zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse einen Zwilling bzw. drei Karten gleicher Farbe zu ziehen.

Einen Zwilling zu ziehen, bedeutet zunächst einmal, dass bei den drei Karten zwei Zahlen vorkommen, von denen eine doppelt gezogen wird (z.B. zweimal die Drei und einmal die Fünf). Die Anzahl möglicher Zahlenkombinationen ist dann $\binom{12}{2}$, wobei wir diese Anzahl noch mit 2 multiplizieren müssen, da jede dieser beiden Zahlen als Zwilling vorkommen kann. Jetzt haben wir dabei jedoch noch nicht berücksichtigt, dass je dieser Zahlenkombinationen noch unterschiedliche Farbkombinationen auftreten können.
Für den Zwilling (also z.B. die beiden Dreien) gibt es exakt $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, und für die einzelne vom Zwilling abweichende Zahl allerdings wieder alle vier möglichen Farben, also $\binom{4}{1}$ Kombinationen. Somit erhalten wir als Ergebnis für die Wahrscheinlichkeit, einen Zwilling zu ziehen: $p = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{2}\cdot 2}{\binom{48}{3}} = \frac{4\cdot 4\cdot 3\cdot 12\cdot 11\cdot 2\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 48\cdot 47\cdot 46} = \frac{3\cdot 12\cdot 11}{47\cdot 46} \approx 0.1832$.

Die Wahrscheinlichkeit, drei Karten gleicher Farbe zu ziehen ist dagegen wieder einfacher zu ermitteln: $p = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{12}{3}}{\binom{48}{3}} = \frac{4\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{48\cdot 47\cdot 46} \approx 0.0509$, denn wir haben 4 unterschiedliche Farben und ziehen von den in dieser Farbe vorkommenden 12 Karten genau 3 mit unterschiedlichen Zahlen.

Damit können wir uns nun der eigentlichen Fragestellung zuwenden.

Der zu erwartende Gewinn errechnet sich dann für Andy wie folgt:

$$E = 0.1832\cdot 1 + 0.0509\cdot 4 + 0.0028\cdot 8 = 0.4092\ ,$$

d.h. Andy bekommt im Schnitt für seinen Einsatz von 50 Cent einen Gewinn von fast 41 Cent zurück. Um das Spiel aus Sicht Andys fair bzw. günstig zu gestalten, berechnen wir:
$0.1832\cdot A + 0.0509\cdot 4 + 0.0028\cdot 8 \ge 0.5$ bzw. $0.1832\cdot A \ge 0.5 - 0.0509\cdot 4 - 0.0028\cdot 8 = 0.5 - 0.2036 - 0.0224 = 0.3176$.
Wir erhalten also: $A \ge \frac{0.3176}{0.1832} = 1.734$, d.h. der Gewinn für einen Zwilling sollte mindestens 1.74 Euro sein, d.h. gegenüber den ursprünglich angesetzten 1 Euro um 74 Cent höher ausfallen.