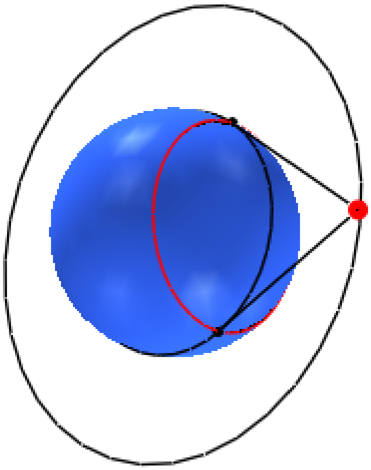
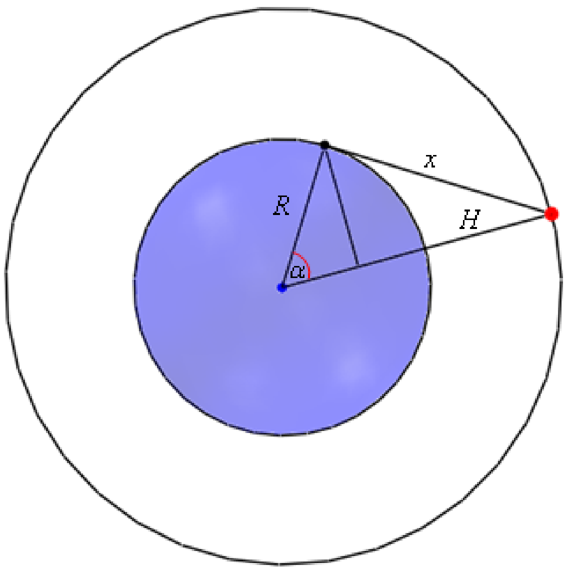
Äquatorseil um 1 Meter verlängert

Angenommen Sie würden um die Erde, genau am Äquator, ein Seil spannen und dieses nachträglich um exakt 1 Meter verlängern. Die Frage, die sich hieraus ergeben, sind:



1. Welchen Abstand hat dieses verlängerte Seil von der Erdoberfläche,oder anders ausgedrückt, könnten Sie eine Hand darunter schieben ?
2. Wenn Sie das verlängerte Seil an einem Ort am Äquator in die Höhe ziehen, und zwar so weit, dass das restliche Seil eng an der Erdoberfläche anliegt, wie weit ist der höchste Punkt (siehe Skizze unten – nicht maßstabsgerecht) von der Erdoberfläche entfernt ?

Lösung:
Die erste Frage lässt sich sehr schnell beantworten, denn es gilt:
$2\pi R + 1 = 2\pi \cdot r$ wobei $r = R + H$ in nebenstehender Grafik der neue Radius ist.
Daraus folgt. $2\pi \cdot (r - R) = 1$ bzw.
$r - R = \frac{1}{2\pi} \approx 0.15915$, also ungefähr 16 cm, d.h.
das neue, um 1 Meter verlängerte Seil hat einen Abstand von $ca.\,16\,cm$ von der Erdoberfläche; ein so nicht unbedingt erwartetes Ergebnis.
Noch beeindruckender und so nicht geschätztes Ergebnis erhalten wir bei der Lösung der zweiten Frage.



Zunächst gilt: $\tan\alpha = \frac{x}{R}$ und damit $x = R \cdot \tan\alpha$; außerdem

$2\pi R + 1 = 2\pi R - \frac{2\alpha}{360} \cdot 2\pi R + 2x = 2\pi R \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{180}\right) + 2x$. Hieraus folgt: $1 = 2R \cdot \tan\alpha - \frac{\alpha}{180} \cdot 2\pi R$

oder anders ausgedrückt: $2R \cdot \tan\alpha - \frac{\alpha}{180} \cdot 2\pi R - 1 = 0$ bzw. $\tan\alpha - \frac{1}{2R}\left(1 + \frac{\alpha}{180} \cdot 2\pi R\right) = 0$. Ein solcher Ausdruck lässt sich näherungsweise mittels einer Intervall-Schachtelung lösen, wobei wobei die Intervalle nach folgender Formel berechnet werden:

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \alpha_n + \left|\frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{2}\right|, & wenn\ A - B > 0 \\ \alpha_n - \left|\frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{2}\right|, & wenn\ A - B < 0 \end{cases}$$

Intervall - Schachtelung

α_{n+1}	$\alpha_n\ [Grad]$	$A = \tan \alpha_n$	$B = \frac{1}{2R} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_n}{180} \cdot 2\pi R\right)$	$A - B$
15	**30**	0,5773502692	0,5235988541	5,38E-02
7,5	**15**	0,2679491924	0,2617994663	6,15E-03
3,75	**7,5**	0,1316524976	0,1308997724	7,53E-04
1,875	**3,75**	0,0655434628	0,0654499254	9,35E-05
0,9375	**1,875**	0,0327366104	0,0327250020	1,16E-05
0,46875	**0,9375**	0,0163639221	0,0163625402	1,38E-06
0,234375	**0,46875**	0,0081814134	0,0081813093	1,04E-07
0,3515625	**0,234375**	0,0040906383	0,0040906939	-5,57E-08
0,41015625	**0,3515625**	0,0061360002	0,0061360016	-1,47E-09
0,38085938	**0,41015625**	0,0071586993	0,0071586555	4,38E-08
0,36621094	**0,380859375**	0,0066473480	0,0066473286	1,94E-08
0,35888672	**0,366210938**	0,0063916737	0,0063916651	8,56E-09
0,35522461	**0,358886719**	0,0062638368	0,0062638334	3,44E-09
0,35339355	**0,3552246094**	0,0061999185	0,0061999175	9,57E-10
0,35430908	**0,3533935547**	0,0061679593	0,0061679596	-2,65E-10
0,35385132	**0,3543090820**	0,0061839389	0,0061839385	3,45E-10
0,35362244	**0,3538513184**	0,0061759491	0,0061759490	3,94E-11
0,35373688	**0,3536224365**	0,0061719542	0,0061719543	-1,13E-10
0,3537941	**0,3537368774**	0,0061739516	0,0061739517	-3,67E-11
0,35376549	**0,3537940979**	0,0061749504	0,0061749504	1,34E-12
0,35377979	**0,353765487671**	0,0061744510	0,0061744510	-1,77E-11
0,35378695	**0,353779792786**	0,0061747007	0,0061747007	-8,18E-12
0,35379052	**0,353786945343**	0,0061748255	0,0061748255	-3,42E-12
0,35379231	**0,353790521622**	0,0061748879	0,0061748879	-1,04E-12
0,35379142	**0,353792309761**	0,0061749192	0,0061749192	1,51E-13
0,35379186	**0,353791415691**	0,0061749035	0,0061749035	-4,44E-13
0,35379209	**0,353791862726**	0,0061749114	0,0061749114	-1,46E-13
0,35379197	**0,353792086244**	0,0061749153	0,0061749153	2,30E-15
0,35379203	**0,3537919744849**	0,0061749133	0,0061749133	-7,21E-14
0,35379206	**0,3537920303643**	0,0061749143	0,0061749143	-3,49E-14
0,35379207	**0,3537920583040**	0,0061749148	0,0061749148	-1,63E-14
0,35379208	**0,3537920722738**	0,0061749150	0,0061749150	-6,99E-15
0,35379208	**0,3537920792587**	0,0061749151	0,0061749151	-2,35E-15
0,35379208	**0,35379208275117**	0,0061749152	0,0061749152	-2,08E-17
0,35379208	**0,35379208449740**	0,0061749152	0,0061749152	1,14E-15
0,35379208	**0,353792083624285**	0,0061749152	0,0061749152	5,60E-16
0,35379208	**0,353792083187727**	0,0061749152	0,0061749152	2,70E-16
0,35379208	**0,353792082969449**	0,0061749152	0,0061749152	1,25E-16
0,35379208	**0,353792082860309**	0,0061749152	0,0061749152	5,29E-17
0,35379208	**0,353792082805739**	0,0061749152	0,0061749152	1,56E-17
0,35379208	**0,353792082778455**	0,0061749152	0,0061749152	0

Wir erhalten als Ergebnis einen Winkel von ca. 0.35379208 Grad mit einem Fehler kleiner als $1 \cdot 10^{-15}$, also kleiner als einem Billiardstel Grad.

Jetzt müssen wir nur noch daraus die Höhe errechnen und sind fertig. Es gilt ja: $\cos\alpha = \frac{R}{R+H}$, also $R+H = \frac{R}{\cos\alpha}$ bzw. $H = \frac{R}{\cos\alpha} - R$ und damit schlussendlich:

$H = R \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1 \right) \approx 121.460779$, das sind ca. $121{,}50\, Meter$. Wer hätte das gedacht.

Verständlich wird es, wenn man bedenkt, dass das Seil auf einer Länge von annähernd $39{,}34\, km$ angehoben und gespannt wird.