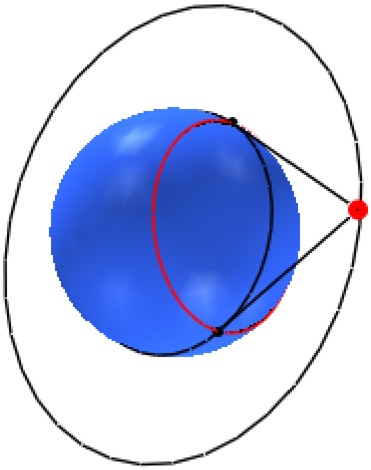
# Äquatorseil – und Vektoralgebra

Angenommen Sie würden um die Erde, genau am Äquator, ein Seil spannen und dieses nachträglich um exakt 1 Meter verlängern. Die Frage, die sich hieraus ergeben, sind:



1. Welchen Abstand hat dieses verlängerte Seil von der Erdoberfläche,oder anders ausgedrückt, könnten Sie eine Hand darunter schieben ?
2. Wenn Sie das verlängerte Seil an einem Ort am Äquator in die Höhe ziehen, und zwar so weit, dass das restliche Seil eng an der Erdoberfläche anliegt, wie weit ist der höchste Punkt (siehe Skizze unten – nicht maßstabsgerecht) von der Erdoberfläche entfernt ?

Die mathematischen Lösungen hierzu finden Sie im Abschnitt Geometrie der Lösungsdatenbank MATHSOL als PDF File zum Download. Hier geht es darum zu zeigen, wie die Vektoralgebra geholfen hat, die Grafiken zu zeichnen. Imerhin musste von einem fiktiven Punkt außerhalb einer Kugel im dreidimensionalen euklidischen Raum eine Gerade tangential an die Kugel gezeichnet werden.

Zunächst galt es einen Kreis um den „Erdball" in einem gewissen Abstand zu zeichnen, der auf der Höhe des Äquators verläuft, andererseits aber schräg im Raum liegen sollte.

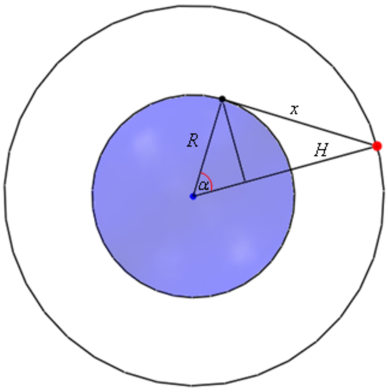
Die Ebene, in der dieser Kreis liegt, sollte den Normalenvektor $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben.

Entsprechend galt für den roten Punkt und damit den roten Kreis auf der Erdoberfläche, dass dieser Kreis in einer Ebene orthogonal zu der zuvor genannten Ebene liegen musste. Das Seil auf dem Äquator (ebenfalls schwarzer Kreis) dagegen lag in derselben Ebene wie der anfangs genannte äußere Kreis. Der Normalenvektor für den roten Kreis ergab sich ganz einfach aus der Differenz der beiden Ortsvektoren für den roten Punkt und den Ursprung:

$P = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 8{,}43 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; die z-Koordinate ergab sich aus der Tatsache, das der rote Punkt auf einer gedachten Kugeloberfläche um den Ursprung im Abstand 30 liegen sollte, während die „Erdkugel" selbst einen fiktiven Radius von 16 hatte.

Der zweite Normalenvektor der Ebene für den roten Kreis hatte also den Wert: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 8{,}43 \end{pmatrix}$.

Für den Radius des roten Kreises musste ja entsprechend folgender Grafik gelten:




$\cos\alpha = \frac{R}{R+H} = \frac{16}{30}$ *bzw.* $\alpha = \arccos\frac{16}{30}$, und damit:

$\sin\alpha = \frac{r}{R}$, *also* $r = 16 \cdot \sin\left(\arccos\frac{16}{30}\right)$. Für den Abstand des Mittelpunktes des roten Kreises vom Ursprung auf der Geraden zum roten Punkt galt demnach auch:

$q = R \cdot \cos\alpha = R \cdot \frac{R}{R+H} = \frac{16 \cdot 16}{30}$. Wegen Ähnlichkeit der Dreiecke hätte man dieses auch schließen können aus: $\frac{q}{R} = \frac{R}{R+H}$.

Jetzt blieb nur noch das Problem der Tangentialpunkte auf der Erdoberfläche.

Da die beiden Ebene sich im Raum in einer Gerade schneiden, deren Richtungsvektor wir mithilfe des Kreuzproduktes der beiden Normalenvektoren ermitteln können, hatten wir die Lösung schnell gefunden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 8{,}43 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35{,}43 \\ 6{,}85 \\ -64 \end{pmatrix}.$$

Der Mittelpunkt des roten Kreises hat die Koordinaten: $M = q \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 8{,}43 \end{pmatrix}$; somit haben die gesuchten Tangentialpunkte die Koordinaten:

$T_{1,2} = q \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 8{,}43 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 35{,}43 \\ 6{,}85 \\ -64 \end{pmatrix}$. Jetzt nur noch die Werte für q und r einsetzen und wir sind fertig.