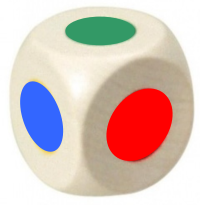
Würfeln mit einem idealen Würfel mit 3 verschiedenen Farben

Bei einem Würfelspiel muss ein Spieler drei Kugeln der Farben Rot, Grün und Blau in dieser Reihenfolge zu einem Kugelturm zusammensetzen. Als Spielwürfel wird ein idealer Würfel verwendet, der zwei rote, zwei grüne und zwei blaue Flächen hat.



Ein Spielzug besteht aus maximal drei Würfen. Der Spielzug ist beendet, sobald die Farbe der Kugel, die als nächstes für den Kugelturm benötigt wird, gewürfelt wurde. Die entsprechende Kugel wird dem Kugelturm hinzugefügt, und der nächste Spieler ist an der Reihe. Nach maximal 3 Würfen ist ein Spielzug beendet, auch wenn die gewünschte Farbe nicht gewürfelt wurde.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im dritten Wurf des ersten Spielzuges die Farbe Rot gewürfelt wird.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die rote Kugel im ersten Spielzug gesteckt wird.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es dem Spieler gelingt, in drei Spielzügen seinen Kugelturm komplett zu stecken.

d) Wählt man als Zufallsvariable die Anzahl der aufgetürmten Kugeln nach 3 Spielzügen, berechnen Sie den jeweiligen Erwartungswert.

Lösung:

zu a):
das Ergebnis lässt sich sehr rasch am Baumdiagramm ablesen, bzw. auch logisch und trivial herleiten: $p = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \approx 0.148$

zu b):
hierzu bedienen wir uns des Gegenereignisse bzw. komplementären Ereignisses, nämlich dass die rote Kugel im ersten Spielzug nicht gesteckt wird, d.h. es wird dreimal hintereinander nicht die Farbe Rot gewürfelt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis:
$p(\overline{R}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Spielzug, also maximal 3 Würfen, die Farbe ROT gewürfelt wird, ist dann:

$$p(R) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \approx 0.704 .$$

Auf einen Spielzug bezogen, gelten die gleichen Wahrscheinlichkeiten natürlich auch für die anderen zwei Farben.

zu c):
in drei Spielzügen hintereinander muss jeweils die Wahrscheinlichkeit von Aufgabe b) gelten,

d.h. $p = p(R)\cdot p(G)\cdot p(B) = \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^3 = \left(1-\frac{8}{27}\right)^3 = \left(\frac{19}{27}\right)^3 = 0.348$

zu d):
Wählt man als Zufallsvariable die Anzahl der aufgetürmten Kugeln nach 3 Spielzügen, kommt man zu folgenden Ergebnissen.

1. $X = 0$, d.h. nach 3 Spielzügen wurde kein einziges Mal die Farbe Rot gewürfelt.

   Die Wahrscheinlichkeit ist dann:

   $$\binom{3}{0}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^0\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \left(\frac{8}{27}\right)^3$$

2. $X = 1$, es wurde genau einmal ROT (bzw. die richtige Farbe gewürfelt !)

   Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist:

   $$\binom{3}{1}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^1\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^2 = 3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6-\left(\frac{2}{3}\right)^9\right) = 3\cdot\left(\frac{19}{27}\right)\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^2$$

   Der Faktor 3 ergibt sich durch die drei möglichen Zeitpunkte (Spielzüge), bei denen die Farbe Rot gewürfelt wurde. In allen drei Fällen wurde jedoch vorher oder hinterher nicht die richtige Farbe (vorher also Rot, bzw. hinterher Grün) gewürfelt.

3. $X = 2$, es wurde zweimal die richtige Farbe gewürfelt.

   Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist:

   $$\binom{3}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^2\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^1 = 3\cdot\left(1-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6+\left(\frac{2}{3}\right)^9\right) = 3\cdot\left(\frac{19}{27}\right)^2\cdot\left(\frac{8}{27}\right)$$

   Der Faktor 3 ergibt sich erneut durch die drei möglichen Zeitpunkte (Spielzüge), bei denen die dritte gewünschte Farbe nicht gewürfelt wurde. D.h. es wurden die Farben Rot und Grün gewürfelt, jedoch nicht Blau im 3. Spielzug. Und die Farben Rot und Grün wurden in dieser Reihenfolge im ersten und zweiten, im ersten und dritten oder aber im zweiten und dritten Spielzug gewürfelt.

4. $X = 3$, es wurde dreimal die richtige Farbe gewürfelt, also erst Rot, dann Grün und im dritten Spielzug Blau.

   Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist:

   $$\binom{3}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^0 = \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^3 = 1-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6-\left(\frac{2}{3}\right)^9 = \left(\frac{19}{27}\right)^3$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass die Summe dieser 4 Wahrscheinlichkeiten exakt 1 ist.