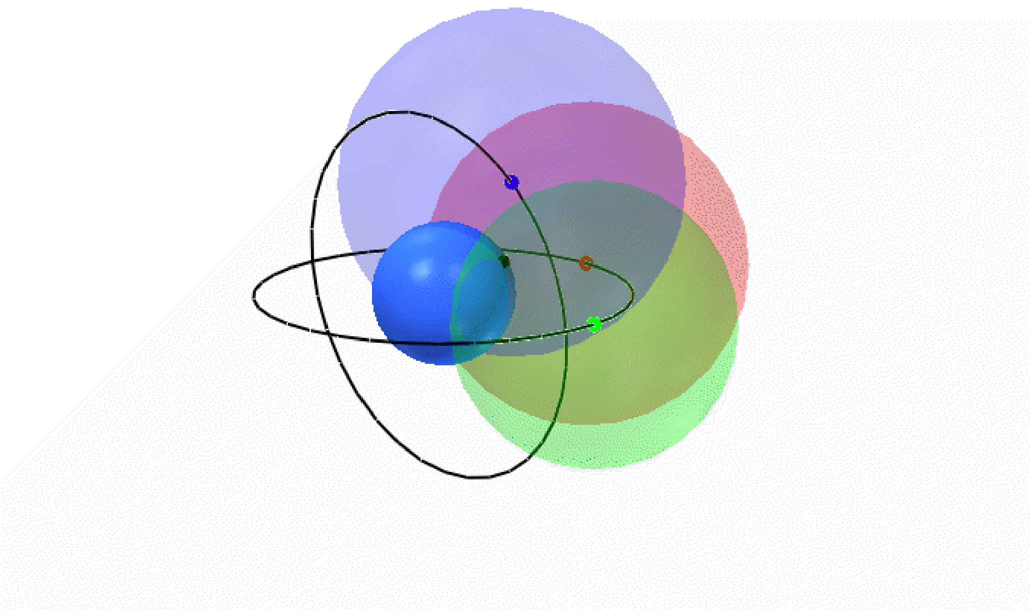
Wie funktioniert ein GPS System ?

Im Prinzip ganz einfach. Mehrere Satelliten, die sich in einer bzw. mehreren geostationären Umlaufbahnen über der Erde befinden, strahlen regelmäßig ihren derzeit aktuellen Stand der Atomzeit aus. Das GPS Gerät auf der Erdoberfläche empfängt dieses Signal und vergleicht es mit seiner eigenen Atomzeit. Aus der Differenz ergibt sich die Laufzeit des Signals vom Satelliten zum GPS Empfänger auf der Erdoberfläche. Hieraus wiederum ergibt sich die Entfernung des Satelliten vom GPS Empfänger, da man weiß, dass sich das Signal mit Lichtgeschwindigkeit bewegt..

D.h. wir erhalten um jeden Satelliten in seiner Umlaufbahn eine Kugel, an deren Oberfläche sich der GPS Empfänger derzeit befinden kann.

Die Oberfläche einer solchen Kugel eines einzelnen Satelliten bildet mit der Erdoberfläche einen Kreis als Schnittfläche. Zwei derartige Kreise schneiden sich in der Regel in 2 Punkten (z.B. in jeweils einem Punkt auf der nördlichen und einem auf der südlichen Halbkugel). Nimmt man einen dritten Satelliten hinzu, schneiden diese 3 Kreise sich exakt in einem einzigen Punkt, dem Standort des GPS Empfängers.

Die folgenden Zeichnungen (nicht maßstabsgetreu) mögen dies verdeutlichen.



Aufgabe:

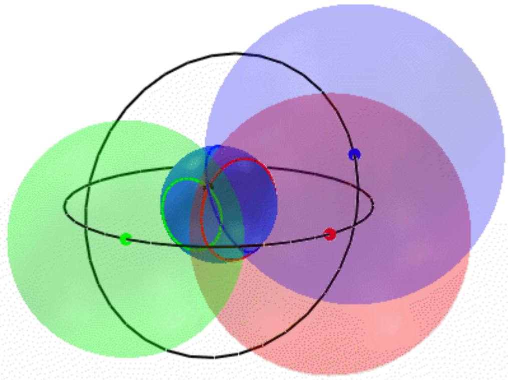
Die Aufgabe besteht nun darin, diesen Schnittpunkt dreier Kugeln an der Erdoberfläche exakt zu berechnen.

Lösung:

Zunächst erinnern wir uns an die gegebenen Konstanten (Angaben in 1.000 km).

Radius Umlaufbahn: r	42,24442822
Radius Erde: R	6,371008767
Höhe über Äquator:	35,87341945

Den Radius der Umlaufbahn der Satelliten hatten wir bereits ermittelt, siehe dazu im Buch „Mathematik verstehen – eine Lern- und Übungshilfe auf dem Weg zum Abitur und darüber hinaus“, Seite 220 ff, Wolfgang Kuhn, Pro Business Verlag, Berlin 2010.



Zwei Satelliten befinden sich der Einfachheit halber auf ein und derselben Umlaufbahn direkt über dem Äquator. Ein dritter Satellit in einer anderen Umlaufbahn. Die Standorte dieser Satelliten zum Zeitpunkt des Ausstrahlens ihres Signals waren:

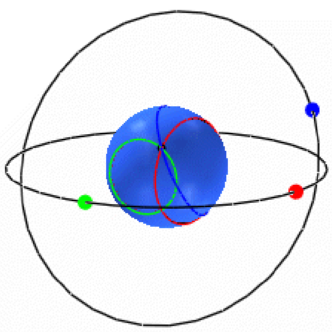
Standort Satellit 1:P1	a1=35,000	b1=23,657	c1=0
Standort Satellit 2:P2	a2=28,000	b2=-31,632	c2=0
Standort Satellit 3:P3	a3=10,000	b3=37,245	c3=17,245

Der zu ermittelnde Standort des GPS Empfängers sei mit (x,y,z) bezeichnet:

Dann gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = r^2$, $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = r^2$ sowie $a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = r^2$.



Nun wollen wir den Schnittpunkt aller drei Kugeloberflächen auf der Erdoberfläche ermitteln.

Dazu stellen wir die jeweiligen Oberflächengleichungen auf:

$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = s_1^2$,
$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = s_2^2$ sowie
$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = s_3^2$, wobei für die Radien dieser Kugeln gilt:

Dabei seien t_1, t_2 und t_3 die gemessenen Zeitunterschiede der jeweiligen Atomzeitstände im GPS Empfänger und in den drei Satelliten. Aus diesen Zeitdifferenzen ergeben sich die Entfernungen zum jeweiligen Satelliten und damit die Radien der Kugeloberflächen:

$s_1 = C \cdot t_1$, $s_2 = C \cdot t_2$, $s_3 = C \cdot t_3$ mit der Lichtgeschwindigkeit $C = 299.792.458 \; {}^{m}\!/\!{}_{s}$.

Damit können wir lösen:

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 + z^2 - 2c_1z + c_1^2 = s_1^2 .$$

Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ und $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = r^2$ folgt daraus:

$-2a_1x - 2b_1y - 2c_1z = s_1^2 - R^2 - r^2$ bzw. $a_1x + b_1y + c_1z = \frac{1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_1^2\right)$.

Entsprechend für den zweiten und dritten Satelliten:

$a_2x + b_2y + c_2z = \frac{1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_2^2\right)$ und $a_3x + b_3y + c_3z = \frac{1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_3^2\right)$.

Wir erhalten einen Lineares Gleichungssystem, welches wir normal lösen, indem wir z.B. zunächst die Variable z eliminieren und so zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y erhalten. Danach eliminieren wir eine weitere Variable (z.B. die Variable y) und erhalten die Lösung für x.

Im vorliegenden Fall machen wir es uns ein wenig einfacher, da wir die Standorte der Satelliten ja so gewählt hatten, dass $c_1 = c_2 = 0$ galt. Folglich haben wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
a_1x + b_1y &= \tfrac{1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_1^2\right)\\
a_2x + b_2y &= \tfrac{1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_2^2\right)\\
a_3x + b_3y + c_3z &= \tfrac{1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_3^2\right)
\end{aligned}$$

Hier betrachten wir also zunächst die beiden ersten Gleichungen und lösen nach x und y, indem wir die erste Gleichung mit b_2 :und die zweite Gleichung mit b_1 multiplizieren und dann von einander abziehen:

$$\begin{aligned}
a_1x + b_1y &= \tfrac{1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_1^2\right)\\
a_2x + b_2y &= \tfrac{1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_2^2\right)
\end{aligned}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = \frac{b_2}{2}\left(r^2 + R^2 - s_1^2\right) - \frac{b_1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_2^2\right)$$

und damit: $x = \dfrac{\frac{b_2}{2}\left(r^2 + R^2 - s_1^2\right) - \frac{b_1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_2^2\right)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$.

Einsetzung von x in eine der beiden Gleichungen liefert: y

$$y = \frac{1}{b_1}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(r^2 + R^2 - s_1^2\right) - a_1 \cdot \frac{\frac{b_2}{2}\left(r^2 + R^2 - s_1^2\right) - \frac{b_1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_2^2\right)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}\right)$$

Nun setzen wir diesen beiden Werte in die dritte Gleichung ein und erhalten die Lösung für die Koordinate z: $a_3x + b_3y + c_3z = \frac{1}{2}\left(r^2 + R^2 - s_3^2\right)$, also

$$z = \frac{1}{c_3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(r^2 + R^2 - s_3^2\right) - \left(a_3x + b_3y\right)\right)$$

Hätten wir das Signal von nur zwei Satelliten vorliegen, ergäbe sich der Wert für z aus der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, da der Standort des GPS Empfängers ja auf der Erdoberfläche liegt. Das Ergebnis ist: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; wir erhielten zwei Lösungen, eine auf der nördlichen und eine zweite auf der südlichen Halbkugel.

An dieser Stelle wollen wir von folgenden gemessenen Zeitunterschieden beim Vergleich der jeweiligen Atomzeituhren ausgehen:

Unterschied Zeit t1:	0,129530941	sec
Unterschied Zeit t2:	0,135215112	sec
Unterschied Zeit t3:	0,130194798	sec

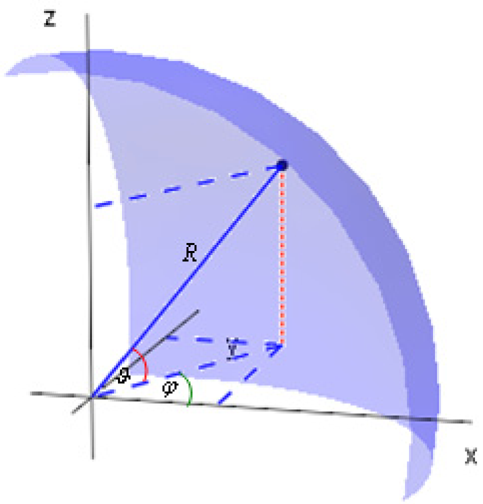
Daraus ergeben sich folgende Kugelradien (nach Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit $C = 299.792.458 \; \frac{m}{s}$, Angaben der Entfernung in 1.000 km):

Entfernung von s1:	38,832399
Entfernung von s2:	40,536471
Entfernung von s3:	39,031419

Als Schnittpunkt aller drei Kugeloberflächen erhalten wir:

$(x, y, z) = (4.051833968, 0.71014346, 4.864986174)$.

Wenn wir diese Lösung haben, können wir noch in Polarkoordinaten umrechnen, siehe auch „Mathematik verstehen – eine Lern- und Übungshilfe auf dem Weg zum Abitur und darüber hinaus", Seite 162 ff, Wolfgang Kuhn, Pro Business Verlag, Berlin 2010.



$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.1726333$ und

$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} = 0.64567401$,

woraus folgt:

$\varphi = 9.940960304$, $\vartheta = 49.7837704$.

Wenn wir diese Winkel jetzt noch in Grad, Minute und Sekunde umrechnen, erhalten wir 49:47:01,57348 nördliche Breite und 9:56:27,45709 östliche Länge, was einem Standort auf dem südlichen Stadtring (B19) in Würzburg entspricht.

Heutige GPS Empfänger arbeiten mit einer Ungenauigkeit im 10 Nanosekundenbereich (entspricht einem 10-Milliardstel einer Sekunde $= 10 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{sec}$). Multipliziert man diese Zeit mit der Lichtgeschwindigkeit, ergibt dies eine Abweichung von zirka 3 Metern.