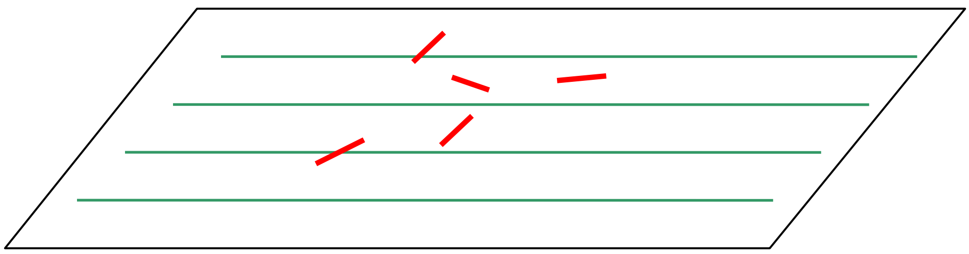
Nadelproblem nach Buffon

Eine äußerst interessante Fragestellung ergibt sich im Bereich der Wahrscheinlichkeitslehre oder Stochastik aus dem Experiment eine Nadel der Länge l aus beliebiger Höhe auf eine mit parallelen Linien vom Abstand L durchzogenen Fläche fallen zu lassen. Dabei gilt: $l \leq L$.

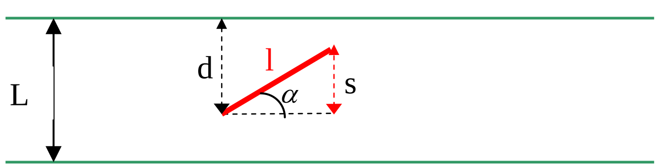


Die Frage lautet: mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft (berührt oder schneidet) die Nadel eine Linie ?
Ich will die Antwort vorwegnehmen, da sie doch sehr verblüffend ist. Wiederholt man das Experiment ausreichend oft, kann man mit hiermit die Kreiszahl π bis auf eine unglaubliche Genauigkeit exakt bestimmen.

Die Wahrscheinlichkeit errechnet sich nach:

$$P = \frac{2 \cdot l}{L \cdot \pi}$$

Andererseits gilt bei entsprechend großer Anzahl an Wiederholungen des Experimentes:
$P = \frac{Anzahl\ \ Treffer}{Anzahl\ Würfe}$. Daraus ergibt sich für π folgende Rechnung: $\pi = \frac{2 \cdot l}{L \cdot P}$. Wählt man den Abstand der Linien doppelt so groß wie die Länge der Nadel, vereinfacht sich die Berechnung für die Kreiszahl insofern, dass gilt: $\pi = \frac{1}{P}$.
Kommen wir zum Beweis für obige Formel.



Für die Lage der Nadel sind allein zwei Werte bestimmend, die darüber entscheiden, ob die Nadel eine Linie trifft oder nicht:

- der Abstand d der unteren Spitze der Nadel von der darüberliegenden Linie mit der Bedingung $0 \leq d \leq L$

- der Winkel α gegenüber den parallel verlaufenden Linien mit der Bedingung $0 \leq \alpha \leq \pi$.

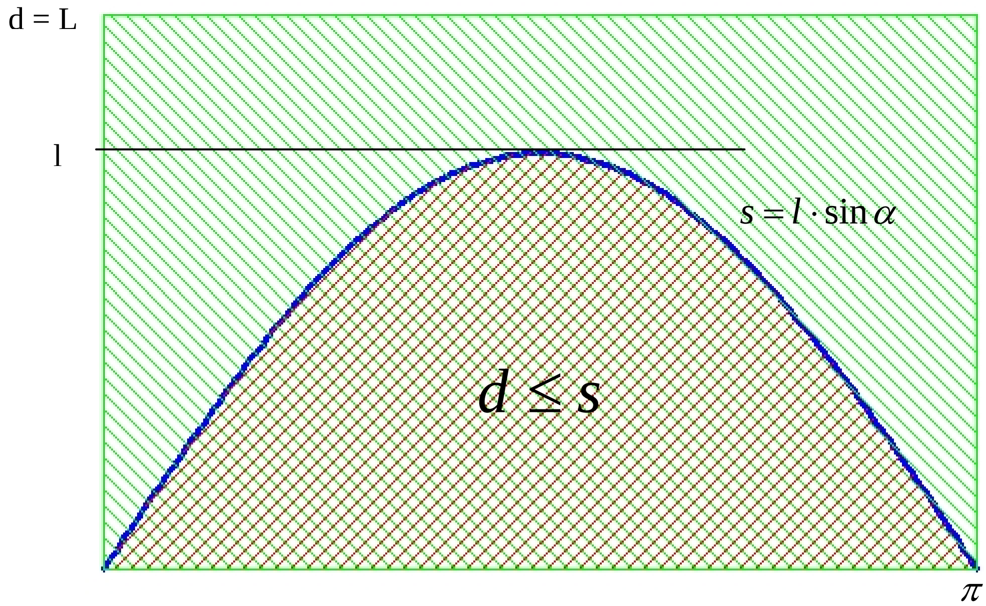
Für die Lage der unteren Spitze der Nadel ergeben sich hieraus insgesamt also $L \cdot \pi$ Möglichkeiten.
Für s erhalten wir: $s = l \cdot \sin \alpha$. Sollte die Nadel eine Linie berühren oder schneiden, muß gelten: $d \leq s$.

Wir müssen also lediglich die Anzahl aller Möglichkeiten, bei denen $d \leq s$ ist, dividieren durch die Anzahl aller möglichen Lagen der Nadelspitze, um die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, mit der die Nadel nach dem Fallenlassen eine Linie berührt oder schneidet..

$$P = \frac{\int_0^{\pi} l \cdot \sin x \; dx}{L \cdot \pi}$$

$$\int_0^{\pi} l \cdot \sin x \, dx = l \cdot \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = l \cdot \left(-\cos \pi - \left(-\cos 0\right)\right) = l \cdot \left(-\left(-1\right) - \left(-1\right)\right) = l \cdot 2 = 2 \cdot l$$

Daraus folgt demnach: $\boxed{P = \frac{2 \cdot l}{L \cdot \pi}}$, also obige Behauptung.
Grafisch können wir uns das auch folgendermaßen veranschaulichen:



Ist die Nadel also z.B. halb so groß wie der Abstand der Linien, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine Linie trifft, exakt $1/\pi \approx 0.318$, also ca. 31,8 % .

