Wachsender Sandberg mit Schüttgut vom Förderband

Mittels Förderband wird ein Sandberg aufgeschüttet mit 1 dm^3 Sand pro Sekunde. Dabei gehen wir davon aus, dass der Sandberg einen Böschungswinkel von 30^o hat und diesen auch während der Aufschüttung beibehält.

Geben Sie eine Funktion für die Höhe des Sandbergs $h\ [dm]$ in Abhängigkeit von der Zeit $t[\sec]$ an.
Nach welcher Zeit hat der Sandberg eine Höhe von 10m erreicht?

Wie groß ist die Höhenänderung des Sandbergs, wenn er gerade eine Höhe von 2m erreicht hat?

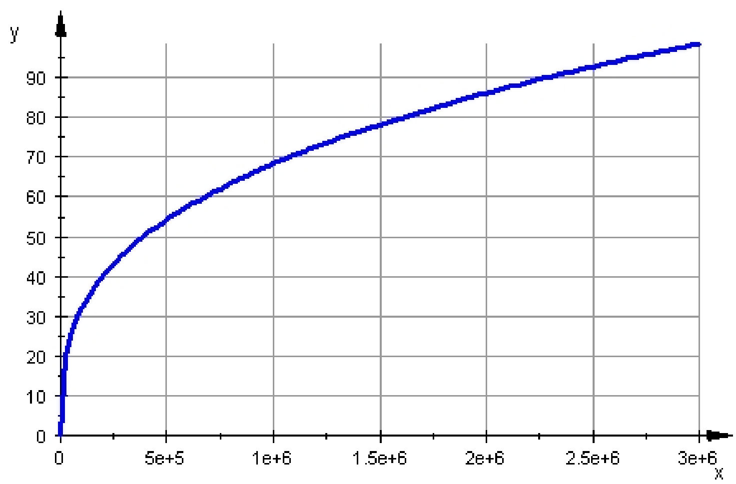
Lösung:

Der Sandberg bildet die Form eines Kegels, dessen Volumen sich nach der Formel berechnet: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$. Da der Böschungswinkel 30^o beträgt, ergibt sich das Verhältnis $\frac{h}{r} = \tan 30^o$.

Wegen $\tan 30^o = \frac{\sin 30^o}{\cos 30^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ gilt: $\frac{h}{r} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, bzw.: $h = r \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $r = h \cdot \sqrt{3}$.

Das Volumen des Sandkegels wächst pro Sekunde um 1 dm^3, d.h. $V(t) = t$ und damit: $t = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot 3 \cdot h = \pi \cdot h^3$. Somit ergibt sich für die Höhe die Funktion:

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{t}{\pi}}.$$



Die Höhe von 10m (entspricht 100 dm) wird dann erreicht nach:

$100 = \sqrt[3]{\frac{t}{\pi}}$ bzw.

$t = 100^3 \cdot \pi = 10^6 \cdot \pi \approx 3.14 \cdot 10^6 [\sec]$.

Umgerechnet in Stunden wären das ca.
$872.66[h]$ oder 36 Tage, 8 Stunden und fast 40 Minuten. Der Radius der kreisförmigen Grundfläche würde nach dieser Zeit $r = h \cdot \sqrt{3} = 100\sqrt{3} \approx 173.2[dm]$ oder $17.32[m]$ betragen.

Die Höhe von 2m wird erreicht nach einer Zeit von: $t = 20^3 \cdot \pi = 25.132{,}7[\sec] \approx 6.98[h]$. Zu diesem Zeitpunkt verändert sich die Höhe um $h'(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{t}{\pi}}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^2}{t^2}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\pi \cdot t^2}}$, also

$h'(20^3 \cdot \pi) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\pi \cdot (20^3 \cdot \pi)^2}} = \frac{1}{3 \cdot 20^2 \cdot \pi} \approx 0.000265 \left[{}^{dm}/_{\sec}\right]$, also ca. $0.0027\left[{}^{cm}/_{\sec}\right] = 0.027\left[{}^{mm}/_{\sec}\right]$.