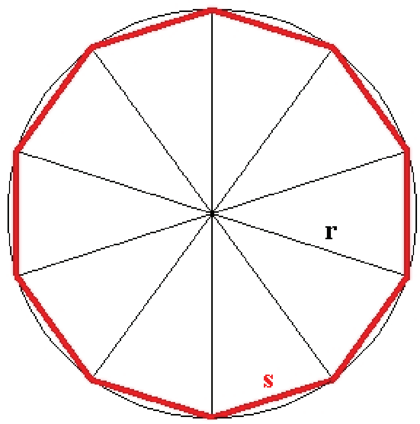
## *Konstruktion eines regelmäßigen Zehnecks*

Konstruieren Sie in einen Kreis mit Radius r ein regelmäßiges Zehneck
(ohne Winkelmesser, nur mit Zirkel und Lineal).

Zeigen Sie außerdem, dass die Seiten-/Kantenlänge s im Verhältnis zum Radius einen Goldenen Schnitt bildet, d.h.

$$\frac{r}{s}=\frac{s}{r-s}$$




(entnommen dem Buch „Mathematik verstehen – eine Lern- und Übungshilfe auf dem Weg zum Abitur und darüber hinaus“ von Wolfgang Kuhn, erschienen im Pro BUSINESS Verlag, Berlin, 2010, ISBN 978-3-86805-537-5)

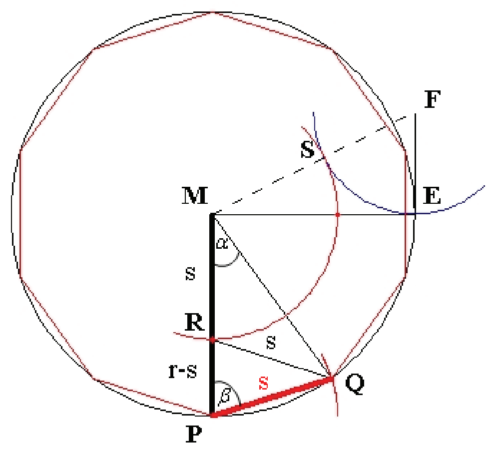
**Lösung:**

Zur Lösung verfahren wir wie bei der Konstruktion des Goldenen Schnitts, d.h. wir zeichnen im Punkt E die Senkrechte auf $\overline{ME}$ mit halbem Radius $r/2$, ziehen dann den Kreis um F mit $r/2$, der die Hilfslinie $\overline{MF}$ im Punkt S schneidet.

Die Strecke $\overline{MS}=s$ bezeichnen wir mit s. Diese bildet, wie wir sehen werden die Kantenlänge des regelmäßigen Zehnecks.

**Zum Beweis** stellen wir zunächst fest: für ein regelmäßiges Zehneck gilt, dass der Innenwinkel jedes gleichschenkeligen Dreiecks in diesem Zehneck
$\alpha=\frac{360}{10}=36^o$ beträgt.

Für die beiden Außenwinkel muss dann gelten:
$\beta=\frac{1}{2}(180-\alpha)=\frac{1}{2}\cdot 144=72^o$.




Den Punkt R konstruieren wir, indem wir die Winkelhalbierende des Außenwinkels $\beta$ $(\sphericalangle PQM)$ konstruieren, welche die Strecke $\overline{MP}$ im Punkt R schneidet.

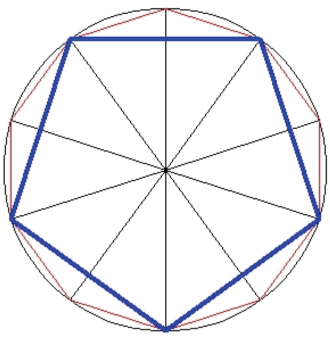
Für den Winkel $\sphericalangle PQR$ gilt dann : $\frac{1}{2}\cdot\beta=\frac{1}{2}\cdot 72=36=\alpha$. Damit ist das Dreieck $\Delta PQR$ ebenfalls gleichschenkelig, da der Winkel $\sphericalangle PRQ$ jetzt ebenfalls $72^o$ beträgt. Damit gilt: $\overline{QR}=\overline{PQ}$. Andererseits ist auch das Dreieck $\Delta MRQ$ gleichschenkelig, denn der Winkel $\sphericalangle RQM$ ist ja ebenfalls $36^o$, also gleich $\alpha$. Damit muss die Strecke $\overline{MR}$ identisch mit $\overline{QR}$ sein, und wir schließen: $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{MR}$.

Wegen der Übereinstimmung aller drei Winkel sind jetzt die Dreiecke $\Delta PQM$ und $\Delta RPQ$ ähnlich.
Folglich ist der Strahlensatz anwendbar, und es gilt:

$\frac{\overline{MP}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RP}}$ und wegen $\overline{QR} = \overline{PQ}$ bzw. $\overline{MR} = \overline{PQ}$ also: $\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MP} - \overline{MR}}$ bzw. $\frac{\overline{MP}}{\overline{MR}} = \frac{\overline{MR}}{\overline{MP} - \overline{MR}}$. Es gilt also für die Streckenteilung der Goldene Schnitt, mit anderen Worten $\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}$, was zu beweisen war. Das regelmäßige Zehneck lässt sich also, wie beschrieben, nur mit Zirkel und Lineal konstruieren. Beginnend im Punkt P zeichnen wir auf dem Kreis mit Radius r, zehnmal entgegen dem Uhrzeigersinn die Strecke $s = \overline{MS} = \overline{MR}$ ab und erhalten so die Ecken des regelmäßigen Zehnecks.

Für die Kantenlänge ergibt sich aus obiger Formel $\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}$, $r(r-s) = s^2$ und daraus $s^2 + rs = r^2$.
Mittels quadratischer Ergänzung folgt $s^2 + rs + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$, also
$s = -\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{5}$. Da s nicht negativ sein kann: $s = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Es lässt sich unschwer erkennen, dass sich aus der Konstruktion ebenfalls das regelmäßige Fünfeck ableiten lässt, für dessen Kantenlänge dann nach Pythagoras gilt:



$\left(\frac{s_5}{2}\right)^2 = s^2 - \left(\frac{r-s}{2}\right)^2$, da der Außenwinkel im Fünfeck $54^o$ beträgt, somit die halbe Kantenlänge mit der Höhe bzw. Seitenhalbierenden im Dreieck $\Delta RPQ$ (siehe oben in der Grafik zum regelmäßigen Zehneck) zusammenfällt und so die Strecke $\overline{RP} = r - s$ halbiert.

Einsetzung von s und erneut quadratische Ergänzung führt zum Ergebnis $s_5 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Zum Schluss sei noch angemerkt, dass in jedem regelmäßigen Vieleck (Polygon) für die Summe der Winkel gilt: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2) \cdot 180$. In einem Quadrat wären das, wie bekannt, 360; in einem Fünfeck 540 und einem Siebeneck 900. Gegeben sei ein n-Eck; dann gilt, wie wir gesehen haben, für einen Außenwinkel: $\beta = \frac{1}{2}\left(180 - \frac{360}{n}\right)$ oder $2\beta = 180 - \frac{360}{n}$. In einem regelmäßigen n-Eck gibt es den Winkel $2\beta$ genau n-mal; d.h. $\alpha_i = 2\beta$ für alle $i = 1,\ldots,n$
bzw. $n \cdot 2\beta = n\left(180 - \frac{360}{n}\right) = n \cdot 180 - 360 = 180 \cdot (n-2)$. Dasselbe Ergebnis erhält man auch für die Summe aller Winkel in einem beliebigen, unregelmäßigen n-Eck.